CHAPITRE I : ENSEMBLES ET FONCTIONS ANALYTIQUES

Dans un espace métrisable compact, tout ouvert (resp compact) est la réunion (resp intersection) d'une suite de compacts (resp ouverts): la tribu borélienne est donc le stabilisé de l'ensemble des ouverts (resp compacts) pour ($\bigcup$ d, $\bigcap$ d). Plus généralement, l'ensemble des fonctions boréliennes est le stabilisé de l'ensemble des fonctions continues pour ($\bigvee$ d, $\bigwedge$ d).

Soit maintenant α une application continue de E dans F. On sait que $\alpha^{-1}(B)$ est borélien dans E pour tout borélien B de F. Par contre, si α n'est pas injective, $\alpha(B)$ peut ne pas être borélien dans F si B est borélien dans E : $\alpha(B)$ est alors ce qu'on appelle un ensemble analytique. Dans le premier paragraphe, nous allons définir les ensembles analytiques comme images directes de boréliens particuliers par des applications continues particulières (des projections) Dans le second, nous étudierons les propriétés de stabilité de l'ensemble des parties analytiques d'un espace. Dans le troisième, nous verrons une autre définition des ensembles analytiques (noyaux de schémas de Souslin). Dans le quatrième est indiquée une méthode qui permet assez souvent de vérifier d'une manière mécanique qu'un ensemble est analytique lorsque sa définition est écrite en symboles logiques. Les "compléments" sont consacrés à des généralisations dans un cadre abstrait et un cadre topologique plus vaste.

Une dernière remarque préliminaire : ce que nous allons faire s'étend aisément aux espaces localement compacts à base dénombrable. Si D est un tel espace, il suffit de considérer son compactifié $E = D \cup \{\infty\}$, en convenant d'étendre toute fonction f définie sur D en posant $f(\infty) = 0$

1.- SCHÉMAS DE PROJECTION

En fait, nous allons étendre un peu la notion d'ensemble analytique en définissant la notion de fonction analytique. Pour cela, nous aurons besoin d'une définition adéquate de la projection d'une fonction.

1 DÉFINITION.- *Soit* f *une fonction définie sur un produit* $E\times F$. *On appelle* projection de f sur E *la fonction* πf *définie par*

$$\pi(x,f) = \sup f(x,y),\ y\in F$$

où $\pi(x,f)$ *désigne la valeur de la fonction* πf *au point* $x\in E$.

Il est clair que, si f est (l'indicatrice d')une partie de $E\times F$, πf est égale à la projection habituelle.

Notons tout de suite quatre propriétés importantes de la projection

2 THÉORÈME.- *Soient* $E\times F$ *un produit, et* π *la projection de* $E\times F$ *sur* E.

a) *si* $f \leq g$, *alors* $\pi f \leq \pi g$

b) *si* (f_n) *est une suite croissante, alors* $\pi(\sup f_n) = \sup \pi f_n$

c) *si* (g_n) *est une suite décroissante de fonctions s.c.s. (i.e. semi-continues supérieurement), alors* $\pi(\inf g_n) = \inf \pi g_n$

d) *si* g *est une fonction s.c.s., alors* πg *est aussi s.c.s.*

DÉMONSTRATION.- Les propriétés a) et b) sont évidentes; plus généralement, d'ailleurs, si (f_i) est une famille quelconque de fonctions, on a $\sup \pi f_i = \pi(\sup f_i)$. Comme toute fonction s.c.s. atteint son maximum sur un compact, il est clair que l'on a $\{\pi g \geq t\} = \pi(\{g \geq t\})$ pour toute fonction s.c.s. g et tout $t \geq 0$: πg est donc s.c.s. si g l'est. Enfin, soit (g_n) une suite décroissante de fonctions s.c.s On a évidemment $\pi(\inf g_n) \leq \inf \pi g_n$. Fixons $x\in E$, et soit $t \geq 0$ tel que l'on ait $\pi(x,g_n) \geq t$ pour tout n. Les ensembles $K_n = \{y : g_n(x,y) \geq t\}$ forment une suite décroissante de compacts non vides de F, et, pour tout $y \in \bigcap K_n$, on a $\inf g_n(x,y) \geq t$. Par conséquent, $\pi(x, \inf g_n)$ est $\geq t$ et il est alors clair que $\pi(\inf g_n) \geq \inf \pi g_n$, d'où l'égalité.

Le chapitre II (resp IV) sera consacré à l'étude des fonctions (resp applications) $f \to Vf$ vérifiant les propriétés de ce théorème.

Essayons maintenant de "calculer" la projection d'une fonction borélienne, en supposant connues celles des fonctions continues (nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la projection d'une fonction continue est encore continue). Supposons d'abord f s.c.i. (i.e. semi-continue inférieurement) : f est alors le sup d'une suite croissante (f_n) de fonctions continues; on sait donc calculer $\pi f = \sup \pi f_n$, qui est aussi s.c.i. De même, une fonction s.c.s. f est l'inf d'une suite décroissante (f_n) de fonctions continues; on sait donc calculer $\pi f = \inf \pi f_n$, qui est aussi s.c.s. Maintenant, si f est le sup d'une suite croissante (f_n) de fonctions s.c.s., on sait calculer aussi $\pi f = \sup \pi f_n$, qui est encore le sup d'une suite croissante de fonctions s.c.s. Par contre, si f est l'inf d'une suite décroissante de fonctions s.c.i., on ne sait plus calculer πf, car "π" ne commute pas en général avec "inf" (voir cependant le paragraphe 3). Pour la commodité de l'exposé, nous poserons

3 DÉFINITION.- <u>Une fonction borélienne est dite</u> élémentaire <u>si elle est la limite d'une suite décroissante de fonctions, chacune de ces fonctions étant elle-même la limite d'une suite croissante de fonctions s.c.s.</u>

REMARQUES.- 1) L'ensemble des fonctions s.c.s. étant stable pour $(\vee f, \wedge f)$, il est facile de voir que l'on obtient les mêmes fonctions boréliennes si on supprime les adjectifs "croissante"et"décroissante" de la définition. Nous verrons cependant par la suite que la possibilité de prendre des suites croissantes est très importante.

2) On peut restreindre la classe des fonctions boréliennes élémentaires en remplacant "s.c.s." par "continues" : une fonction borélienne élémentaire est alors la limite d'une suite de fonctions s.c.i. (cf la remarque du n.8). Cette possibilité sera mise à profit au chapitre III. Elle a cependant un caractère essentiellement topologique que n'a pas la définition 3 (cf les compléments).

Voici maintenant la définition d'une fonction analytique. Nous verrons bientôt que toute fonction borélienne est analytique.

4 DÉFINITION.- Une fonction g définie sur E est dite analytique s'il existe une fonction borélienne élémentaire f, définie sur un produit ExF, telle que g soit la projection πf de f sur E.

Toute fonction borélienne élémentaire g est analytique : elle est la projection de la fonction borélienne élémentaire $f = g \times 1_F$. D'autre part, si $g = \pi f$, f élémentaire, alors $h = g \times 1_G$ est analytique aussi, puisque c'est la projection de $f \times 1_G$ sur ExG.

Vérifions rapidement que les ensembles analytiques peuvent être définis uniquement à partir d'ensembles élémentaires. Soit f une fonction borélienne élémentaire : il existe, par définition, une suite décroissante (f^m) telle que $f = \inf f^m$, et, pour chaque m, une suite croissante (f^m_n) de fonctions s.c.s. telle que $f^m = \sup f^m_n$. Si $g = \pi f$ est l'indicatrice d'un ensemble, on peut alors remplacer la fonction f^m_n par l'indicatrice du compact $K^m_n = \{f^m_n \geq \frac{1}{2}\}$, sans altérer la projection g (et, si les f^m_n sont continues, on peut remplacer f^m par l'indicatrice de l'ensemble ouvert $U^m = \{f^m > \frac{1}{2}\}$).

Nous verrons d'autre part à la fin du paragraphe suivant qu'une fonction g est analytique si et seulement si l'ensemble $\{g \geq t\}$ est analytique pour tout $t \geq 0$.

2.- STABILITÉ DE L'ENSEMBLE DES FONCTIONS ANALYTIQUES

Afin de ne pas obscurcir la démonstration du théorème suivant par des vérifications simples, mais longues et fastidieuses, nous avons laissé au lecteur le soin de les faire.

5 THÉORÈME.- L'ensemble des fonctions analytiques définies sur E est stable pour $(\vee d, \wedge d, +d, \times d)$ et pour les "lim sup", "lim inf" et limites de suites.

DÉMONSTRATION.- Notons d'abord qu'il faut restreindre les produits dénombrables aux suites (g_n) telles que g_n soit ≤ 1 pour n suffisamment grand, afin d'éviter les problèmes de convergence. Pour démontrer le théorème, il suffit évidemment de démontrer la stabilité pour $(\vee d, \wedge d)$ et de vérifier que la somme et le produit de deux fonctions analytiques est encore analytique. Nous désignerons par (g_n) une suite de fonctions analytiques sur E, et, pour chaque n, par f_n une fonction borélienne élémentaire définie sur un produit $E \times F_n$ telle que $g_n = \pi f_n$ (nous nous permettrons d'écrire "π" toute projection).

i) stabilité pour $(\vee d)$: soit F la somme topologique des espaces metrisables compacts F_n : F est un espace localement compact à base dénombrable, que nous compactifions par un point "∞". Désignons par f la fonction sur $E \times F$ dont la restriction à $E \times F_n$ est égale à f_n : on vérifie aisément que f est une fonction borélienne élémentaire. Comme $\sup g_n = \pi f$ (π projection de $E \times F$ sur E), la fonction $\sup g_n$ est analytique.

ii) stabilité pour $(\wedge d)$: soit F le produit des espaces métrisables compacts F_n : F est un espace métrisable compact. Pour chaque n, soit f'_n la fonction sur $E \times F$ telle que $f'_n(x, y_1, \ldots, y_n, \ldots) = f_n(x, y_n)$.

Il est clair que f'_n est une fonction borélienne élémentaire pour chaque n, et donc aussi $f = \inf f'_n$. Comme $\inf g_n = \pi f$ (π projection de ExF sur E), la fonction $\inf g_n$ est analytique.

iii) stabilité pour somme et produit : soit $F = F_1 x F_2$ et soient f'_1 et f'_2 définies sur ExF par $f'_1(x,y_1,y_2) = f_1(x,y_1)$ et $f'_2(x,y_1,y_2) = f_2(x,y_2)$. Les fonctions f'_1 et f'_2 sont bboréliennes élémentaires, ainsi que les fonctions $f'_1+f'_2$ et $f'_1.f'_2$. Par conséquent, la fonction g_1+g_2 (resp $g_1.g_2$), égale à la projection de $f'_1+f'_2$ (resp $f'_1.f'_2$), est analytique.

REMARQUE.- On se gardera de croire que l'ensemble des fonctions analytiques est stable pour les différences, ou les quotients. En général, le complémentaire d'un ensemble analytique n'est pas analytique (voir le théorème 11 du chapitre II).

6 COROLLAIRE.- Toute fonction borélienne est analytique.

DÉMONSTRATION.- Toute fonction continue est borélienne élémentaire, et donc analytique. L'ensemble des fonctions boréliennes étant le plus petit ensemble contenant les fonctions continues et stable pour $(\vee d, \wedge d)$, toute fonction borélienne est analytique.

7 COROLLAIRE.- Pour chaque entier n, soit g_n une fonction analytique définie sur E_n et supposons $g_n \leq 1$ pour n suffisamment grand. La fonction $g = g_1 x \ldots x g_n x \ldots$, définie sur le produit E des E_n, est analytique.

DÉMONSTRATION.- Il suffit d'appliquer le théorème 5 aux fonctions $g'_n(x_1,\ldots,x_n,\ldots) = g_n(x_n)$.

Le théorème suivant montre que l'on a suffisamment étendu l'ensemble des fonctions boréliennes pour obtenir la stabilité par projection.

8 THÉORÈME.- Si la fonction g est analytique sur un produit ExF, la projection πg de g sur E est analytique.

DÉMONSTRATION.- Il existe, par définition, une fonction borélienne élémentaire f, définie sur un produit (ExF)xG, telle que g soit la projection de f sur ExF. Il suffit alors de remarquer que πg est la projection de f sur E.

REMARQUE.- Si on restreint l'ensemble des fonctions boréliennes élémentaires en remplacant "s.c.s." par "continues" dans la définition 3, les démonstrations des théorèmes 5, 6 et 8 sont encore valables : il en résulte immédiatement qu'on définit avec cet ensemble de fonctions élémentaires les mêmes fonctions analytiques.

9 COROLLAIRE.- Soit α une application borélienne de E dans F. Si A est analytique dans E (resp F), alors $\alpha(A)$ (resp $\alpha^{-1}(A)$) est analytique dans F (resp E).

DÉMONSTRATION.- Rappelons que α est borélienne si $\alpha^{-1}(B)$ est borélien dans E pour tout borélien B de F. Soit $\Gamma = \{(x,y) : y = \alpha(x)\}$ le graphe de α dans ExF : c'est l'image réciproque de la diagonale de FxF par l'application borélienne $(x,y) \to (\alpha(x),y)$ de ExF dans FxF. La diagonale étant compacte, Γ est borélien, et donc analytique. Par conséquent, $\alpha(A)$ (resp $\alpha^{-1}(A)$), égal à la projection sur F (resp E) de l'ensemble analytique $\Gamma \cap (A\times F)$ (resp $\Gamma \cap (E\times A)$), est aussi analytique.

Une application continue étant borélienne, nous retrouvons ainsi la définition des ensembles analytiques de l'introduction. Notons encore que l'image directe $\alpha(B)$ d'un borélien de E par l'application borélienne α n'est pas borélienne en général dans F. Elle l'est cependant si α est de plus injective (théorème de Souslin-Lusin, dont la démonstration, difficile dans le cas général, est triviale si α est continue).

Voici, pour finir, une caractérisation des fonctions analytiques à l'aide des ensembles analytiques.

10 THÉORÈME.- Une fonction g définie sur E est analytique si et seulement si elle satisfait l'une des conditions suivantes.

a) l'ensemble $\{g > t\}$ (resp $\{g \geq t\}$) est analytique pour tout $t \geq 0$.

b) le sous-graphe ouvert (resp fermé) de g, i.e. l'ensemble

$$\{(x,t) \in E \times \overline{\mathbb{R}}_+ : g(x) > t \ (\text{resp} \geq t)\}$$

est analytique dans $E \times \overline{\mathbb{R}}_+$.

DÉMONSTRATION.- Nous allons montrer que (g analytique) => (g vérifie le b)) => (g vérifie le a)) => (g analytique), et nous nous contenterons de le faire pour les inégalités strictes dans a) et b). Supposons g analytique, et soit f une fonction borélienne élémentaire définie sur ExF telle que $g = \pi f$. Le sous-graphe ouvert de g est égal à la projection sur $E \times \overline{\mathbb{R}}_+$ du sous-graphe ouvert de f : ce dernier étant borélien, celui de g est analytique. Maintenant, si le sous-graphe ouvert A de g est analytique, l'ensemble $\{g > t\}$, égal à la projection sur E de l'ensemble $A \cap (E \times]t,+\infty])$, est aussi analytique pour tout $t \geq 0$. Supposons enfin que l'ensemble $\{g > t\}$ est analytique pour tout $t \geq 0$, et désignons par $h(x,t)$ la valeur de $1_{\{g>t\}}$ en x. Pour x fixé, la fonction $t \to h(x,t)$ est l'indicatrice de l'intervalle $[0,g(x)[$: on a donc $g(x) = \int_0^\infty h(x,t)\,dt$. Il ne reste plus qu'à approcher l'intégrale par des sommes de Riemann pour obtenir la fonction g comme limite d'une suite de fonctions analytiques : la fonction g est donc analytique.

3.- SCHÉMAS DE SOUSLIN

11 Nous utiliserons les notations suivantes : nous désignerons par S (resp Σ) l'ensemble des suites finies (resp infinies) d'entiers. Si s est un élément de S, et t un élément de S ou de Σ , la notation "$s < t$" signifie que t commence par s : par exemple, s = 4,3,7,5 et t = 4,3,7,5,1,8,8 . Si σ est un élément de Σ (ou de S), nous désignerons par σ_1, σ_2, σ_3, ... les termes successifs de la suite σ.

Reprenons maintenant le "calcul" des projections, et revenons au cas de la projection d'une fonction borélienne élémentaire f. Par définition, il existe une suite décroissante (f^m), et pour chaque m, une suite croissante (f_n^m) de fonctions s.c.s. telles que l'on ait

$$f = \inf f^m \qquad f^m = \sup f_n^m$$

Essayons de projeter f : on sait que la projection π commute avec n'importe quel "sup", mais seulement avec les "inf" de suites <u>décroissantes</u> de fonctions <u>s.c.s.</u> En tenant compte de la formule de distributivité entre "sup" et "inf", on a

$$f = \inf_m (\sup_n f_n^m) = \sup (\inf_k f^1_{\sigma_1} , f^2_{\sigma_2} , \ldots , f^k_{\sigma_k} , \ldots)$$

Posons, pour toute suite finie $s = s_1, \ldots, s_k$

$$f_s = \inf (f^1_{s_1}, f^2_{s_2}, \ldots , f^k_{s_k})$$

On a alors

$$f = \sup_{\sigma \in \Sigma} (\inf_{s<\sigma} f_s)$$

Pour tout $s \in S$, la fonction f_s est s.c.s., et, pour tout $\sigma \in \Sigma$, la famille $(f_s)_{s < \Sigma}$ est une suite décroissante de fonctions s.c.s.
On obtient alors, pour valeur de πf,

$$g = \pi f = \pi[\sup_{\sigma\in\Sigma} (\inf_{s<\sigma} f_s)] = \sup_{\sigma\in\Sigma} (\inf_{s<\sigma} \pi f_s) = \sup_{\sigma\in\Sigma} (\inf_{s<\sigma} g_s)$$

où $g_s = \pi f_s$ est une fonction s.c.s. pour tout $s \in S$. Une telle représentation de g s'appelle schéma de Souslin. Plus précisement :

12 DÉFINITION.- Soit ϕ un ensemble de fonctions sur E. On appelle schéma de Souslin sur ϕ une application $s \to g_s$ de S dans ϕ telle que $g_s \geq g_t$ pour $s < t$. On appelle noyau du schéma de Souslin $s \to g_s$ la fonction g définie par $g = \sup_{\sigma \in \Sigma} \left(\inf_{s < \sigma} g_s \right)$.

Nous avons démontré ci-dessus le résultat suivant :

13 THÉORÈME.- Toute fonction analytique est le noyau d'un schéma de Souslin sur l'ensemble des fonctions s.c.s.

Nous verrons au chapitre IV que le schéma de Souslin particulier que nous avons exhibé ci-dessus a des propriétés remarquables.

Réciproquement, on a

14 THÉORÈME.- Le noyau d'un schéma de Souslin sur l'ensemble des fonctions analytiques est encore une fonction analytique.

DÉMONSTRATION.- Soit $s \to g_s$ un schéma de Souslin où, pour chaque $s \in S$, la fonction g_s est analytique sur E, et soit g son noyau. Nous allons montrer que g est alors la projection d'une fonction analytique f sur ExF, où F désigne l'espace métrisable compact $(\mathbb{N} \cup \{\infty\})^{\mathbb{N}}$, et donc une fonction analytique d'après le théorème 8. Munissons Σ de la topologie produit de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, et, pour tout $s \in S$, soit $I_s = \{\sigma \in \Sigma : s < \sigma\}$ Il est facile de voir que I_s est ouvert et fermé dans Σ, et que Σ est l'intersection d'une suite d'ouverts de F : donc Σ et les ensembles I_s sont analytiques dans F. Désignons, pour tout $s \in S$, par $|s|$ la longueur de la suite finie s (i.e. son nombre d'éléments), et posons, pour tout entier n, $f_n = \sup_{|s| = n} (g_s \times 1_{I_s})$. Comme g_s est une fonction analytique pour tout s, et que l'ensemble des s de longueur n est dénombrable, la fonction f_n est aussi analytique. Soit alors $f = \inf f_n$: f est analytique sur ExF, et nous allons vérifier que le noyau g est égal à la projection πf de f sur E.

Faisons d'abord la remarque suivante : si s et t sont deux suites finies, alors $I_s \cap I_t = \emptyset$, sauf si $s < t$ ou $t > s$, auquel cas on a $I_s \supset I_t$ ou $I_s \subset I_t$. Appliquons maintenant la formule de distributivité entre "sup" et "inf" dans l'égalité $f = \inf_n \left(\sup_{|s|=n} (g_s \times 1_{I_s})\right)$.
Etant données les propriétés des I_s indiquées ci-dessus, on a

$$f = \sup_{\sigma \in \Sigma} \left(\inf_k (g_{\sigma|1} \times 1_{I_{\sigma|1}}), \ldots , (g_{\sigma|k} \times 1_{I_{\sigma|k}}), \ldots \right)$$

où $\sigma|k$ désigne la suite finie (de longueur k) $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$. D'où, finalement,

$$f = \sup_{\sigma \in \Sigma} \left((\inf_{s < \sigma} g_s) \times 1_{\{\sigma\}} \right)$$

Il est alors clair que l'on a $g = \pi f$.

4.- LA MÉTHODE SYMBOLIQUE DE KURATOWSKI ET TARSKI

Nous nous contentons ici d'une "initiation pratique" à cette méthode, sans nous étendre sur les différentes classes boréliennes et projectives.

15 NOTATIONS ET TERMINOLOGIE.- Soit X un symbole variable, désignant une propriété de classe d'ensembles : par exemple, suivant les notations consacrées, $X = \underline{\underline{G}}$ = "ouvert", $X = \underline{\underline{F}}$ = "fermé", $X = \underline{\underline{K}}$ = "compact", $X = \underline{\underline{A}}$ = "analytique". Nous dirons qu'un ensemble est CX (resp PX) s'il est le complémentaire (resp la projection) d'un ensemble X, qu'il est X_σ (resp X_δ) s'il est la réunion (resp intersection) d'une suite d'ensembles X : ainsi, un $C\underline{\underline{K}}$ est $\underline{\underline{G}}$, un $P\underline{\underline{G}}_\delta$ est $\underline{\underline{A}}$. Enfin, si Y est un autre symbole variable, nous dirons qu'un ensemble est $X \cup Y$ (resp $X \cap Y$) s'il est la réunion (resp intersection) d'un ensemble X et d'un ensemble Y (on notera que "être $X \cup Y$" ne veut pas dire "être X ou Y", etc). Nous supposerons toujours, d'autre part, qu'un symbole X satisfait à la condition suivante : si l'ensemble M est X dans E, alors MxF est aussi X dans ExF.

16 RÈGLES ÉLÉMENTAIRES.- Nous désignons ici par $\alpha(x)$, $\beta(x,y)$ etc des fonctions propositionnelles, où $x \in E$, $(x,y) \in E \times F$ etc. On a les règles suivantes, à peu près évidentes

1) Si $\{x : \alpha(x)\}$ est X, alors $\{x : \text{non } \alpha(x)\}$ est CX.

2) Si $\{x : \alpha(x)\}$ est X et si $\{x : \beta(x)\}$ est Y,
alors $\{x : \alpha(x) \text{ ou } \beta(x)\}$ est $X \cup Y$ et $\{x : \alpha(x) \text{ et } \beta(x)\}$ est $X \cap Y$.

3) Si, pour tout entier n, $\{x : \alpha_n(x)\}$ est X,
alors $\{x : \exists n\ \alpha_n(x)\}$ est X_σ et $\{x : \forall n\ \alpha_n(x)\}$ est X_δ .

4) Si $\{x : \alpha(x)\}$ est X, alors $\{(x,y) : \alpha(x)\}$ est X.

5) Si $\{(x,y) : \beta(x,y)\}$ est X,
alors $\{x : \exists y\ \beta(x,y)\}$ est PX et $\{x : \forall y\ \beta(x,y)\}$ est CPCX

On a enfin les règles simplificatrices suivantes (dues au fait que nos espaces sont métrisables compacts)

6) $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{K}}$, donc $P\underline{\underline{F}} = P\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}$ et $P\underline{\underline{F}}_\sigma = P\underline{\underline{K}}_\sigma = \underline{\underline{K}}_\sigma$
$\underline{\underline{G}} = C\underline{\underline{K}}$, donc $CPC\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{G}}$ et $CPC\underline{\underline{G}}_\delta = \underline{\underline{G}}_\delta$.

Tout cela semble bien facile, mais, comme nous allons le voir dans quelques exemples, il faut une certaine ingéniosité pour trouver la "bonne" formule logique, et une certaine pratique pour appliquer ces règles en cascade.Notons aussi qu'un ensemble peut avoir plusieurs définitions qui conduisent à des résultats plus ou moins précis.

17 EXEMPLES.- 1) Nous appellerons <u>topologie fine</u> sur un produit $E \times F$ le produit de la topologie métrisable compacte de E par la topologie discrète de F : ainsi une partie H de $E \times F$ est finement fermée (i.e. fermée pour la topologie fine) si, pour tout $y \in F$, la coupe $H(y)$ de H suivant y est fermée dans E. Ceci dit, on a
"Si A est analytique dans $E \times F$, son adhérence fine $\overline{A}^f$ l'est aussi"

En effet, désignons par d une distance sur E compatible avec sa topologie; en symboles logiques, on a

$$(x,y)\in\overline{A}^f \Leftrightarrow \forall n \quad \exists x'\in E \quad d(x,x')<\frac{1}{n} \quad \text{et} \quad (x',y)\in A$$

L'ensemble $\{(x,x',y) : d(x,x')<1/n\}$ est $\underline{\underline{G}}$ et l'ensemble $\{(x,x',y)\in A\}$ est $\underline{\underline{A}}$ (règle 4)). En appliquant successivement les règles 2),5) et 3), on obtient que $\overline{A}^f$ est $[P(\underline{\underline{G}}\cap\underline{\underline{A}})]_\delta$ et donc $\underline{\underline{A}}$.

L'intérieur fin d'une partie analytique de ExF est, en général, seulement CPC$\underline{\underline{A}}$; cependant, on a

"Si A est analytique et finement fermé dans ExF, son intérieur fin $\mathring{A}^f$ est analytique"

En effet, désignons par (U_m) une base dénombrable d'ouverts de E et, pour chaque entier m, par $(U_{m,n})$ une base dénombrable d'ouverts de U_m telle que $\overline{U}_{m,n}$ soit contenu dans U_m pour chaque n. Désignons enfin, pour chaque couple d'entiers (m,n), par $(x_{m,n,k})$ une suite de points de $U_{m,n}$, partout dense dans $U_{m,n}$. Un fermé K de E contient alors l'ouvert U_m (m fixé) si et seulement s'il contient $\overline{U}_{m,n}$ pour tout n, et donc si et seulement s'il contient $x_{m,n,k}$ pour tout n et tout k. Ainsi, en symboles logiques, on a, si A est finement fermé

$$(x,y)\in\mathring{A}^f \Leftrightarrow \exists m \ [x\in U_m \quad \text{et} \quad (\forall n\ \forall k\ (x_{m,n,k}, y)\in A)]$$

D'après 4) et 3), la fonction propositionnelle entre parenthèses du crochet définit un $\underline{\underline{A}}_{\delta\delta}$ et donc un $\underline{\underline{A}}$. Alors, d'après 2) et 3), (et aussi 4) que nous passerons sous silence désormais), l'intérieur fin de A est un $(\underline{\underline{G}}\cap\underline{\underline{A}})_\sigma$ et donc un $\underline{\underline{A}}$.

Dans les deux derniers exemples (empruntés à Kuratowski [ ]), l'espace E est le segment [0,1].

2) <u>Points initiaux</u> : Soit A une partie de ExF. On dit que (x,y) est un point initial de A si $x = \inf\{x'\in E : (x',y)\in A\}$ (où l'on convient que $\inf \emptyset = 1$ dans [0,1]). On a alors

"Si A est analytique, l'ensemble A_i de ses points initiaux est $C\underline{\underline{A}}$"

En effet, en symboles logiques, on a

$(x,y)\in A_i \Leftrightarrow \forall x'\in E\ [x'< x \Rightarrow (x',y)\notin A] \Leftrightarrow \forall x'\ [x'\geq x \text{ ou } (x',y)\notin A]$

En appliquant les règles 2) et 5), on trouve que l'ensemble A_i est $CPC[\underline{\underline{K}}\cup C\underline{\underline{A}}] = CP[\underline{\underline{G}}\cap\underline{\underline{A}}] = C\underline{\underline{A}}$. Supposons de plus que A est $\underline{\underline{K}}_\sigma$: alors A_i est $CPC[\underline{\underline{G}}_\delta] = \underline{\underline{G}}_\delta$ (cf règle 6)), et donc la projection H de $A\cap A_i$ sur F est $P[\underline{\underline{K}}_\sigma\cap\underline{\underline{G}}_\delta] = \underline{\underline{A}}$. En fait, on peut démontrer que H est $\underline{\underline{G}}_{\delta\sigma}$ (si A est $\underline{\underline{K}}_\sigma$) : pour obtenir ce résultat plus précis, il faut utiliser une "meilleure" définition de H. Soit (K_n) une suite croissante de compacts de ExF, de réunion égale à A. On a alors

$y\in H \Leftrightarrow \exists x\ (x,y)\in A \text{ et } \exists n\,\forall k\,\forall x\ [(x,y)\in K_{n+k} \Rightarrow \exists x'\ (x',y)\in K_n \text{ et } x'\leq x]$

Le second membre de l'implication du crochet définit un $P[\underline{\underline{K}}\cap\underline{\underline{K}}] = \underline{\underline{K}}$, le crochet définit donc un $\underline{\underline{G}}\cap\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{G}}_\delta$, d'où finalement l'ensemble H est un $[P\underline{\underline{K}}_\sigma]\cap[CPC\underline{\underline{G}}_\delta]_{\delta\sigma} = \underline{\underline{K}}_\sigma\cap\underline{\underline{G}}_{\delta\sigma} = \underline{\underline{G}}_{\delta\sigma}$.

3) <u>Crible de Lusin</u> : Soit A une partie de ExF. On considère l'ensemble A_{cr} des $y\in F$ tels que la coupe A(y) de A suivant y ne soit pas bien ordonnée, ce qui revient à dire que A(y) contient une suite décroissante (injective). On a alors

"Si A est analytique, l'ensemble A_{cr} est analytique"

En effet, en symboles logiques on a

$y\in A_{cr} \Leftrightarrow \exists x\ \forall n\ \exists x'\ [(x',y)\in A \text{ et } x< x'< x+\frac{1}{n}]$

est donc A_{cr} est $P[(P(A\cap\underline{\underline{G}}))_\delta] = \underline{\underline{A}}$.

Nous verrons de nombreux autres exemples d'applications au cours des démonstrations de théorèmes dans les chapitres suivants.

5.- COMPLÉMENTS

A : FONCTIONS ANALYTIQUES. CAS ABSTRAIT.

Dans cette section, E, F etc désignent des ensembles sans structure topologique.

18 Un *pavage* sur E est un ensemble de fonctions $\underline{\underline{E}}$ sur E contenant la fonction 0 et stable pour $(\bigvee f, \bigwedge f)$: le couple $(E, \underline{\underline{E}})$ est appelé *espace pavé*. Un pavage $\underline{\underline{K}}$ est dit *compact* s'il est constitué par des ensembles et si toute suite décroissante d'éléments non vides de $\underline{\underline{K}}$ a une intersection non vide. Soient $(E,\underline{\underline{E}})$ et $(K,\underline{\underline{K}})$ deux espaces pavés où $\underline{\underline{K}}$ est compact : on appelle *pavage produit* de $\underline{\underline{E}}$ et $\underline{\underline{K}}$ le pavage $\underline{\underline{E}}x\underline{\underline{K}}$ sur ExK constitué par les sup de suites finies de fonctions de la forme $(fx1_L)$ où f (resp L) appartient à $\underline{\underline{E}}$ (resp $\underline{\underline{K}}$) (le fait que $\underline{\underline{K}}$ soit constitué d'ensembles assure que l'on a $\inf\,[(f_1x1_{L_1}),(f_2x1_{L_2})] = (f_1\wedge f_2, 1_{L_1}\wedge 1_{L_2})$).

Les définitions et théorèmes suivants sont empruntés à MEYER [ ], auquel nous renvoyons pour les démonstrations (en tout point analogues à celles que nous avons données dans le cas topologique, pour la bonne raison que ces dernières ont été calquées sur celles de MEYER !)

19 DÉFINITION.- *Soit* $(E,\underline{\underline{E}})$ *un espace pavé. Une fonction* g *définie sur* E *est dite* $\underline{\underline{E}}$-analytique *s'il existe un espace pavé auxiliaire* $(K,\underline{\underline{K}})$, *où* $\underline{\underline{K}}$ *est compact, et un élément* f *de* $(\underline{\underline{E}}x\underline{\underline{K}})_{\sigma\delta}$ *tel que* g *soit égale à la projection* πf *de* f *sur* E.

On a alors le théorème de stabilité

20 THÉORÈME.- L'ensemble des fonctions $\underline{\underline{E}}$-analytiques est stable pour $(\bigvee d, \bigwedge d)$, et donc pour les "lim sup", "lim inf" et limites de suites.

L'ensemble $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{E}})$ des fonctions $\underline{\underline{E}}$-analytiques est un nouveau pavage sur E, contenant $\underline{\underline{E}}$, et le théorème 8 prend ici la forme suivante

21 THÉORÈME.- Soient $(E,\underline{\underline{E}})$ un espace pavé et $(K,\underline{\underline{K}})$ un espace pavé compact

a) La projection sur E d'une fonction $(\underline{\underline{E}}\mathrm{x}\underline{\underline{K}})$-analytique sur ExK est analytique sur E.

b) L'ensemble des fonctions $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{E}})$-analytiques coïncide avec celui des fonctions $\underline{\underline{E}}$-analytiques.

Enfin, on peut définir des schémas de Souslin, et on démontre comme aux n.13 et 14

22 THÉORÈME.- Soit $(E,\underline{\underline{E}})$ un espace pavé.

a) Toute fonction $\underline{\underline{E}}$-analytique est le noyau d'un schéma de Souslin sur $\underline{\underline{E}}$.

b) Le noyau d'un schéma de Souslin sur $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{E}})$ est une fonction $\underline{\underline{E}}$-analytique.

B : ENSEMBLES ANALYTIQUES. CAS TOPOLOGIQUE.

Nous nous contenterons de définir ici des ensembles analytiques, et de présenter deux définitions topologiques non équivalentes (pour d'autres définitions et les comparaisons de ces définitions, on pourra consulter FROLIK [ ]).

Ensembles sousliniens (cf BOURBAKI [ ])

Rappelons d'abord la définition d'un espace polonais.

23 DÉFINITION.- Un espace topologique P est dit polonais s'il est métrisable, à base dénombrable, et s'il existe une distance sur P, compatible avec sa topologie, pour laquelle P est complet.

On sait que tout ensemble $\underline{\underline{G}}_\delta$ d'un espace polonais est encore polonais, et que tout espace polonais est homéomorphe à un $\underline{\underline{G}}_\delta$ de l'espace compact métrisable $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

24 DÉFINITION.- Un espace topologique séparé E est dit souslinien s'il existe un espace polonais P et une application continue et surjective α de P sur E.

On a les propriétés de stabilité suivantes

25 THÉORÈME.- a) Toute somme dénombrable et tout produit dénombrable d'espaces sousliniens est souslinien.

b) Un espace topologique séparé, image d'un espace souslinien par une application continue et surjective est encore souslinien.

c) L'ensemble des parties sousliniennes d'un espace séparé est stable pour $(\bigcup d, \bigcap d)$, et, de plus, si l'espace est souslinien, contient la tribu des parties boréliennes.

On sait qu'un espace souslinien métrisable est homéomorphe à une partie analytique (au sens du n.4) de $[0,1]^{\mathbb{N}}$. D'une manière générale, les parties sousliniennes d'un espace polonais coïncident avec les noyaux des schémas de Souslin sur les parties fermées (ceux sur les parties compactes donnant les parties sousliniennes contenues dans un $\underline{\underline{K}}_\sigma$). En particulier, les parties sousliniennes d'un espace métrisable compact coïncident avec les parties analytiques telles que nous les avons définies.

Ensembles analytiques (cf CHOQUET [ ] et [ ])

26 DÉFINITION.- Un espace topologique séparé E est dit analytique s'il existe un espace compact auxiliaire K, un sous-espace L de K qui est $K_{\sigma\delta}$ dans K, et une application continue et surjective α de L sur E.

Les espaces analytiques au sens de Choquet satisfont aux propriétés de stabilité du n.25 : on peut remplacer partout dans le théorème 25 "souslinien" par "analytique". Les espaces sousliniens sont analytiques, mais la réciproque est fausse. Cependant, les sous-espaces analytiques d'un espace polonais coïncident avec les sous-espaces sousliniens. En particulier, les sous-espaces analytiques au sens de Choquet d'un espace métrisable compact coïncident avec les parties analytiques telles que nous les avons définies au n.4.

Ensembles sousliniens et boréliens

Le cadre de l'analyse fonctionnelle fournit des exemples naturels d'ensembles analytiques qui ne soient pas boréliens. Ainsi, dans l'ensemble des fonctions continues sur [0,1] muni de la topologie de la convergence uniforme (qui est un Banach séparable, donc un espace polonais), l'ensemble des fonctions dérivables partout est le complémentaire d'un ensemble souslinien qui n'est pas borélien (résultat dû à Mazurkiewicz).